

第2部 モーメント法の基礎とOpenMOM入門

第2章 線状アンテナと面状アンテナ，モーメント法の計算式，入力インピーダンス，遠方界や利得の計算など

モーメント法の基礎

大賀 明夫

Akio Oga

2.1 線状アンテナと面状アンテナ

OpenMOMでは，アンテナの材質として完全導体（以下 PEC と呼ぶ）のみを考え，誘電体や磁性体は考えません。

図2.1のようにアンテナは，その形状から「線状アンテナ」と「面状アンテナ」に分類されます。

線状アンテナでは図(a)のように多数の線分に分割されます。面状アンテナではOpenMOMは図(b)のように縦横にメッシュ分割した「ワイヤ・グリッド・モデル」を採用します。ワイヤ・グリッド・モデルでは金属の板は金網で置き換えられます。

2.2 線状要素

線状アンテナでは分割された線分を「線状要素」と呼びます。一方，面状アンテナでは金網の一つの単位線分を「線状要素」と呼びます。

モーメント法の目的は，それぞれの線状要素を流れる電流を求めることにあります。この電流が求まると，アンテナの入力インピーダンスや放射パターンを初めて，すべての電気的特性を計算できます。

2.3 モーメント法の計算式

OpenMOMが採用しているモーメント法はハリントン^{Harrington}の方法⁽¹⁾にしています。

モーメント法では電磁界を周波数領域で考えるので，最初に電磁界の複素数表示を定義しておきます。周波数 f （角周波数 $\omega = 2\pi f$ ）の場所 $\mathbf{r}$ ，時刻 t の電界は次式で表されます。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{ e^{j\omega t} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \} \quad \dots\dots\dots (2.1)$$

ここで Re は複素数の実部を表します。また j は虚数単位です。周波数領域の計算では右辺の $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が基本量になります。これは複素数です。したがって振幅と位相を持っています。

電流密度 $\mathbf{J}$ の作る電界 $\mathbf{E}$ は次式により計算されます。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{j\eta}{k} \int \{ k^2 \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \nabla \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}') \} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad \dots\dots\dots (2.2)$$

ここで，演算子 ∇ はベクトル微分演算を表します。また G はGreen関数と呼ばれるもので，次式で定義されます。

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(-jk|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad \dots\dots\dots (2.3)$$

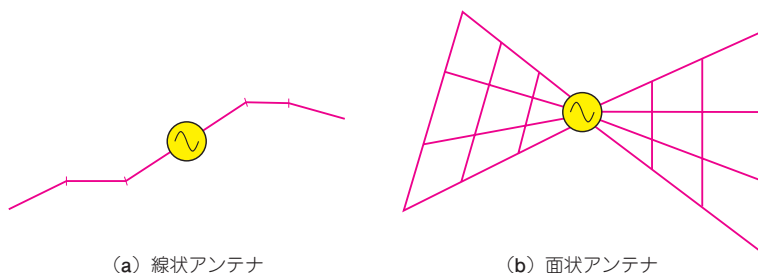
これは次式で示す自由空間の波動方程式の解です。

$$(\Delta + k^2)G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad \dots\dots\dots (2.4)$$

Green関数は点 $\mathbf{r}'$ にある点波源が点 $\mathbf{r}$ に及ぼす影響を表します。式(2.3)は電磁波が球面波で伝わることを表しています。なお， $\eta = 120\pi \Omega$ は波動インピーダンス， $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ は波数であり， ϵ と μ はそれぞれ誘電率と透磁率です。

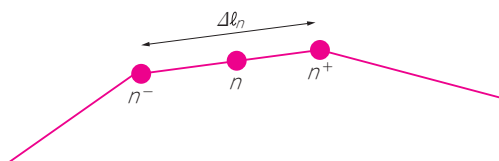
式(2.2)に完全導体の表面では電界の接線成分が0であるという電磁界の境界条件を適用して，線状要素で離散化すると，以下のような連立1次方程式が得られます。

〈図2.1〉アンテナを線状要素へ分割する



(a) 線状アンテナ

(b) 面状アンテナ



〈図2.2〉線状要素の要素番号

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m \quad (m=1, \dots, N) \quad (2.5)$$

ここで行列 Z は「インピーダンス行列」と呼ばれ、次式で計算されます。

$$Z_{mn} = -\frac{j\eta}{k} [\{ G(m^+, n^+) - G(m^+, n^-) - G(m^-, n^+) + G(m^-, n^-) \} - k^2 (\Delta \ell_m \cdot \Delta \ell_n) G(m, n)] \quad (2.6)$$

$$\text{ただし, } G(m, n) \equiv \frac{\exp(-jk|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|)}{4\pi|\mathbf{r}_m - \mathbf{r}_n|} \quad (m \neq n)$$

$$Z_{nn} = \frac{1}{2\pi\Delta\ell_n} \log \left\{ \frac{\Delta\ell_n}{2a_n} + \sqrt{\left(\frac{\Delta\ell_n}{2a_n}\right)^2 + 1} \right\} - \frac{jk}{4\pi} \quad (2.7)$$

ここで m と n の右上の $\pm$ は図2.2のような線状要素の節点(つなぎ目)を表します。また a_n は線状要素 n の半径です。式(2.6)において $m=n$ とすると発散するために、対角成分のみを式(2.7)のように積分する方法が境界要素法の標準的な方法です。

式(2.5)のベクトル $\mathbf{I}$ が求めるべきアンテナ上の電流分布です。ベクトル $\mathbf{V}$ は電圧であり、ユーザが入力した既知量です。具体的には給電点で非0、そのほかで0となります。 N は線状要素の数であり、行列の大きさです。

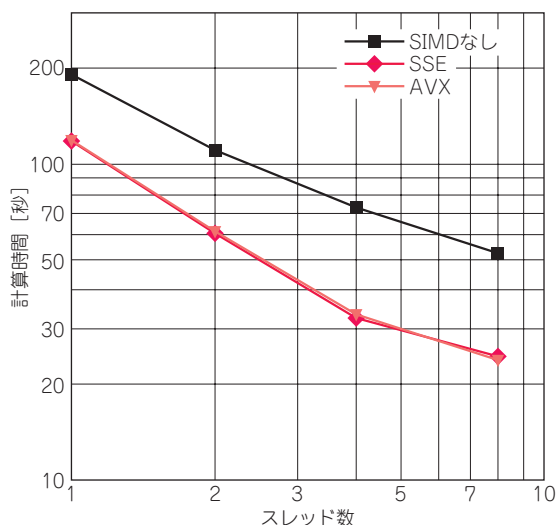
インピーダンス行列 Z と電流分布 $\mathbf{I}$ の各要素は複素数です。そしてインピーダンス行列 Z はすべての要素が非0です。このような行列を「密行列」と呼びます。また行列は対称行列($Z_{mn} = Z_{nm}$)になります。この「複素数対称密行列」であることがモーメント法の特徴です。

OpenMOMでは連立1次方程式(2.5)を修正コレスキー法⁽²⁾によって解いています。その解(電流分布)からアンテナのすべての電気的特性を計算できます。

2.4 必要メモリ、計算時間、高速化

2.4.1 必要メモリ

単精度で計算していますので、必要メモリは行列の対称性を利用して $4N^2$ バイトです。



SIMD : 単一命令 複数データ処理 (Single Instruction / Multiple Data)
SSE : ストリーミングSIMD拡張命令 (Streaming SIMD Extensions)
AVX : MMX/SSE後継のストリーミングSIMD拡張命令 (Intel Advanced Vector Extensions)

〈図2.3〉スレッド数と計算時間の関係 (インテル Core i7-4770K, 要素数: 1万)

2.4.2 計算時間

演算量は $(2/3)N^3$ 回の複素数四則演算となります。したがって計算時間は要素数 N のみで決まり、 N の3乗に比例します。複数の周波数の計算を行うと、計算時間は周波数の数(計算ポイント数)に比例します。

2.4.3 高速化

OpenMOMは、以下の高速化手法を使っています。

● SIMD

CPUの拡張命令(SSEまたはAVX)を使用し、複数(SSEでは4個、AVXでは8個)の演算をベクトル演算で処理しています。

● OpenMP

計算時間のかかるループをOpenMP⁽³⁾を使って並列化しています。マルチコア環境では、計算時間がおよそコア数分の1になります。

図2.3にSIMDの有無とスレッド数を変えたときの計算時間を示します。SIMDにより2~3倍(SSEとAVXはほぼ同性能)、マルチコアによりほぼコア数倍速くなることがわかります。

2.5 入力インピーダンス

アンテナ上の電流分布から、入力インピーダンスと入力アドミタンスは次式で計算されます。